



LA FORMACIÓN DE INGENIEROS:  
UN COMPROMISO PARA EL  
DESARROLLO Y LA SOSTENIBILIDAD

15 al 18  
DE SEPTIEMBRE

20  
20

[www.acofi.edu.co/eiei2020](http://www.acofi.edu.co/eiei2020)

# TEACHING RIGID BODY EQUILIBRIUM: FROM THE STATICS TEXTBOOK TO THE PRACTICAL CLASSROOM EXPERIENCES

**Diana Lorena Cardona Montoya, César Augusto Álvarez Vargas, Jaime Andrés Arenas Barreiro**

**Universidad Autónoma de Manizales  
Manizales, Colombia**

## Resumen

El estudio del equilibrio estático de cuerpos rígidos resulta fundamental en la conceptualización y diseño de sistemas estructurales en ingeniería. Este proceso se realiza de manera genérica con la elaboración de un diagrama de cuerpo libre y la aplicación de ecuaciones de equilibrio especificadas vectorialmente para fuerza y momento. El proceso de enseñanza y aprendizaje habitualmente finaliza cuando el estudiante establece un resultado adecuado que satisface las ecuaciones propuestas sin dar lugar a más conclusiones. El proceso de desarrollo en el aula, ilustrado en este trabajo, propone que el estudiante realice la labor habitual mencionada de manera primaria pero que luego utilice un conjunto de elementos simples mecánicos y de visualización de imágenes con los cuales pueda verificar los resultados expuestos en la teoría y los compare con soluciones pragmáticas establecidas a partir del diseño y montaje de experimentos simples calibrados. El resultado final permite que el estudiante concluya diferencias fundamentales de incertidumbre entre la praxis y la teoría, generadas entre otras por imperfecciones de montaje, fricción, cambios térmicos y otro tipo de perturbaciones no controlables en la práctica y que son considerados como despreciables en el proceso teórico.

**Palabras clave:** equilibrio estático; cuerpo rígido; práctica en el aula; aprendizaje basado en observación

## Abstract

*The study of equilibrium of rigid bodies is a fundamental subject in the fundamentals and design of structural systems in engineering. This process is taught in a general way with the elaboration of a*

*Free Body Diagram and the application of equilibrium vectorial equations for moments and forces. The process of teaching and learning typically takes end when the student finds a solution that fulfills the equilibrium equations but without any engineering conclusions. The proposed method presented in this paper states that students first solve the theoretical problem as it is typically done but complementing its solution using a set of common machine elements and video-editing software tools to compare the solution given by theory with real solutions given by the mounting of calibrated experiments. The final result allows the student to describe conclusions about important differences between theory and practice generated by friction, assembly processes, thermal changes among other kinds of non-controllable perturbations that are considered as negligible in theory.*

**Keywords:** static equilibrium; rigid bodies; classroom experiments; observation-based learning

## 1. Introducción

La estática es una de las asignaturas que hacen parte fundamental del currículo de los programas de ingeniería mecánica a nivel universal (ACOFI, 2004; NCEES, 2017). Su estudio se hace de manera temprana en el currículo de ingeniería, tradicionalmente en el primer o segundo año de acuerdo con los prerrequisitos y/o correquisitos establecidos en cada institución. El concepto central del proceso de enseñanza y aprendizaje de la estática se puede focalizar en el equilibrio de cuerpos rígidos y partículas, tomando en cuenta que una partícula no es más que un cuerpo rígido de dimensiones despreciables respecto a las magnitudes y tipos de las fuerzas externas aplicadas sobre el cuerpo en consideración. Así el objetivo de aprendizaje del estudiante consiste en establecer bajo qué condiciones un cuerpo rígido está en equilibrio, determinando las magnitudes de las cargas internas generadas en el cuerpo rígido bajo la aplicación de las cargas externas de múltiples tipos, sobre las aplicadas. La determinación de las cargas internas incluye por supuesto las reacciones en los apoyos del cuerpo rígido. La metodología del proceso es estándar e incluye un conocimiento formal de geometría vectorial. La metodología consiste en: realizar un diagrama de cuerpo libre de un sistema de cuerpos, un cuerpo o una parte del cuerpo establecido como objeto de análisis, se establecen de acuerdo a la aplicación de la Leyes de la Mecánica de Newton, las ecuaciones de equilibrio de acuerdo a un sistema de referencia ortogonal, arbitrario y dextrógiro, se genera un sistema de ecuaciones algebraicas el cual es habitualmente solucionable con técnicas del álgebra lineal y se concluye con la exposición final de las incógnitas: habitualmente fuerzas de reacción en los apoyos y/o fuerzas internas en un plano interior específico del cuerpo, aunque las incógnitas pueden variar de acuerdo al contexto del problema estudiado, p. e. a veces se indaga por la geometría que satisface la relación entre cargas internas y externas. Este último contexto muchas veces requiere el uso de técnicas no lineales de solución de las ecuaciones y métodos numéricos. El proceso se vuelve repetitivo para diferentes aplicaciones: armaduras, entramados, máquinas, vigas, superficies sumergidas, etc.; y existe múltiple bibliografía best seller que consideran la aplicación de esta metodología y son ampliamente usados por los instructores de la asignatura (Beer, et al., 2018; Hibbeler, 2015; Meriam, et al., 2014; Shames, 1998; Bedford, et al., 2007; Boresi, et al., 2000; Plesha, et al., 2012) entre otros. El proceso se vuelve netamente teórico y de hecho la asignatura se enmarca como de tipo teórica en la mayoría de los currículos estándar. Teniendo en cuenta la visión ASME 2030 (ASME, 2018) que busca establecer en los estudiantes actuales de ingeniería mecánica

estándares tales como: aumentar en el estudiante la familiaridad en cómo se fabrican y cómo trabajan los elementos mecánicos; y también incrementar las experiencias de diseño-construcción-prueba de ingeniería aplicadas a lo largo del proceso de aprendizaje del programa; se decidió hacer una prueba experimental donde los estudiantes debían resolver un problema seleccionado acerca de equilibrio de cuerpos rígidos desde el punto de vista tradicional y posteriormente se propuso realizar un montaje experimental donde se resolviera el problema de manera pragmática tomando datos experimentales, analizando los datos obtenidos y realizando comparaciones con el modelo teórico solucionado. Esta parte experimental se propuso como trabajo en grupos con el fin de incrementar la experiencia de aprendizaje por proyectos en equipos. La conclusión ilustró claramente la necesidad de incrementar la experimentación en este curso como lo propone la visión ASME 2030, donde se observó que los estudiantes necesitan tener una visión temprana del conocimiento apropiado del funcionamiento real de algunos elementos de máquina fundamentales como poleas, resortes y cojinetes, así como el proceso de experimentación y análisis de datos de situaciones pragmáticas en ingeniería. En este artículo se presentan dichas conclusiones y las propuestas de solución de la siguiente manera: en el parágrafo 2 la metodología de trabajo presentada a los estudiantes, en el parágrafo 3 se muestran los resultados obtenidos en la configuración del módulo. Por último, se presentan las conclusiones finales de la experiencia.

## 2. Metodología

Se plantea un proyecto de desarrollo tecnológico, que tiene como propósito el auto equipamiento del laboratorio de máquinas de la Universidad Autónoma de Manizales, por medio de la consecución de varios módulos de experimentación para las áreas de mecánica de sólidos, fortaleciendo en el estudiante los propósitos propuestos en la visión ASME 2030. Específicamente, en esta parte del proyecto, se desarrolla el módulo de verificación del equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones. Este módulo se propone mediante la metodología de diseño propuesta por (Norton, 2006) la cual contempla los siguientes aspectos:

**Identificación de la necesidad:** La necesidad fundamental es el fortalecimiento de los procesos académicos mediante la experimentación, con módulos y guías de laboratorio diseñadas para tal fin, generando en el estudiante objetivos de aprendizaje en el conocimiento básico de elementos de máquina, el proceso de diseño experimental y el fortalecimiento de conclusiones de ingeniería acerca de las diferencias entre el modelo teórico y el modelo experimental

**Investigación de antecedentes:** Se selecciona un problema específico de la bibliografía de uso común en el curso (Beer et al., 2018) para el estudio del equilibrio de un sólido en dos dimensiones. Este modelo es adaptable para el proceso de análisis en tres dimensiones. La implementación de este módulo y la respectiva adaptación de un ejercicio puntual propuesto en la referencia bibliográfica en general, le permitirá a la comunidad educadora y a los educandos fortalecer la base teórica que es dictada en el aula de clase a través de una comparación respecto a la metodología experimental; estableciendo comparaciones entre los dos procesos que ilustran elementos que no son tenidos en cuenta en la teoría: ajustes y tolerancias de ensamble, fricción, alineación, entre otras.

El ejercicio que se plantea, es el desarrollo de un estado de equilibrio para un sistema: polea – masa – resorte, como se muestra en la figura 1.

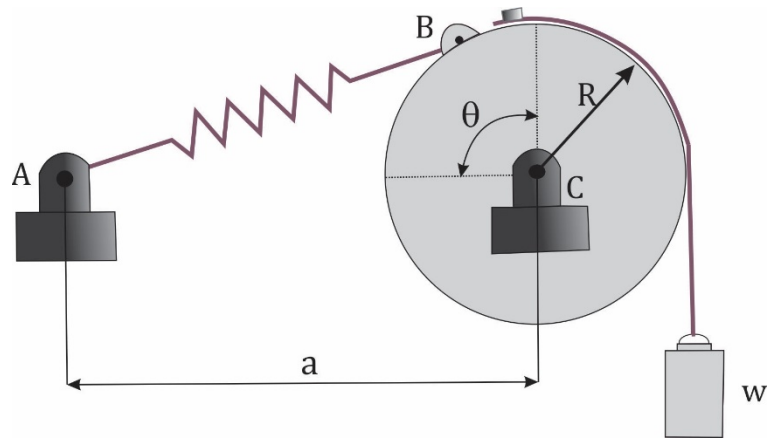


Figura 1. Planteamiento del ejercicio adaptado de Beer et al., 2006.

La metodología de solución que se propone en los libros de mecánica vectorial para ingenieros, parte del diagrama de cuerpo libre y conservar el estado de equilibrio.

Teniendo en cuenta que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido, pueden reducirse a un sistema fuerza-par en un punto arbitrario dado, las condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido se dan si y solo si, se tienen una fuerza y momento externo que la contrarresten de lo contrario, el cuerpo estaría acelerando.

Al descomponer cada fuerza y cada momento en sus componentes rectangulares, si el cuerpo está en equilibrio se debe cumplir que la sumatoria de sus componentes debe ser igual a cero de acuerdo a las siguientes ecuaciones escalares que resultan componentes de dos ecuaciones vectoriales.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (1 \text{ a, b, c})$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (2 \text{ a, b, c})$$

Con base al marco teórico que se rige para la solución de este tipo de modelos, es posible llegar a una solución analítica que describe la variación del ángulo  $\theta$  respecto a la masa  $W$ , que es soportada mediante la polea. La ecuación (3), a continuación, muestra la variación de  $W$  respecto a condiciones geométricas definidas como: el radio  $R$  de la polea, la distancia  $a$  que hace referencia a la abscisa de la posición inicial del resorte en su estado no elongado y el ángulo  $\theta$  que varía entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  y  $k$  es la constante elástica del resorte.

$$W(\theta) = \frac{ak \sin \theta (R - a + \sqrt{R^2 - 2aR \cos \theta + a^2})}{\sqrt{R^2 - 2aR \cos \theta + a^2}} \quad (3)$$

Es importante resaltar que la solución numérica de la ecuación 3, ha sido completada a través del software MatLab (Versión R2019b) aplicando el método numérico de Newton-Raphson que genera el valor del ángulo  $\theta$  para una masa definida por el usuario.

**Establecimiento de metas:** Se propone el desarrollo de un módulo, por parte de estudiantes del Semillero de Investigación de Diseño Mecánico y Desarrollo Industrial, la realización de pruebas y el desarrollo de una guía de laboratorio para implementar la práctica en la asignatura Estática del Plan de Estudios del programa de Ingeniería Mecánica.

**Especificaciones de tarea:** Siguiendo la metodología anunciada, los parámetros del montaje están dados, por el problema seleccionado (Beer et al., 2018) y la guía de laboratorio sigue los lineamientos que tiene contemplado para tal fin, el departamento de Mecánica y Producción de la Universidad Autónoma de Manizales.

**Síntesis:** Se realiza un bosquejo del prototipo físico esperado, contemplando la selección de elementos de máquina y estructurales para el desarrollo del mismo. La síntesis del módulo contempla el desarrollo del montaje en el software SolidWorks versión actualizada 2018-2019.

Este modelo es construido en varias etapas, teniendo en cuenta las restricciones en funcionamiento y disposición que se iban identificando y a su vez, la optimización de tiempo y recursos en el diseño de algunas piezas, de tal manera que se facilitara la construcción del equipo y la precisión en el montaje, de tal forma que las piezas se ajustaran con las tolerancias adecuadas. La figura 2 permite visualizar el prototipo que fue diseñado por el equipo de trabajo.

Cabe resaltar que una de las piezas fundamentales para este sistema (polea) fue impresa a través de una impresora Stratasys tomando como material de deposición ABS (Acrilonitrilo butadieno estireno). De esta manera se puede ilustrar a los estudiantes el proceso de fabricación de uno de los elementos de máquina cumpliendo con uno de los requerimientos fundamentales de la visión ASME 2030. La inclusión del elemento 12 (soporte para celular 3D) permite a los estudiantes ubicar un dispositivo para la toma de fotografías y videos, así como la extrapolación del problema de dos dimensiones a tres dimensiones.

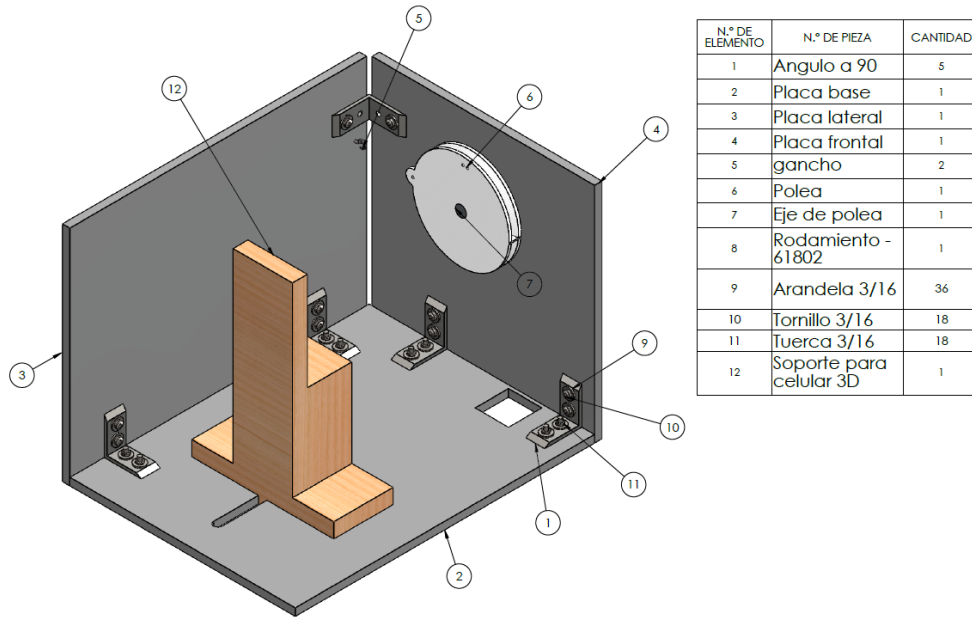


Figura 2. Prototipo diseñado para el montaje experimental.

**Análisis, selección y diseño detallado:** se procede con la construcción del modelo, llevando a cabo todo el proceso de desarrollo analítico necesario, esto es, determinación del modelo matemático, consideración de restricciones físicas, selección de materiales adecuados, evaluación del modelo virtual y el levantamiento de planos (incluyendo medidas de tolerancias dimensionales y geométricas y acabados superficiales).

**Construcción de prototipo:** se lleva a cabo la elaboración de cada una de las piezas necesarias para el montaje del módulo, el desarrollo de esta actividad se da con recursos propios de la UAM, como lo son la impresora 3D y las máquinas herramientas dispuestas en el taller de máquinas (cortadora, taladro, esmeril, taladro fresador y torno). Los elementos necesarios que requieren mayor complejidad como: corte laser de las placas de acrílico para la construcción del octante, son solicitados a empresas conocidas de la ciudad.

En cuanto al desarrollo de la guía de laboratorio, se ejecutan pruebas con el módulo construido y siguiendo los lineamientos de guías para tal propósito y se proyecta ser evaluada en el curso de Estática del segundo semestre del año 2020, teniendo en cuenta que algunos resultados previos sin el montaje adecuado se llevaron a cabo durante el año lectivo 2018 - 2019.

### 3. Resultados y discusión

Para la toma de los datos experimentales, referente al ángulo de variación  $\theta$ , después de la toma del video mediante la cámara de un teléfono celular, se utiliza el software Tracker 5.1.5 para capturar la rotación de la polea generada por la carga  $W$ . La figura 3, muestra la medición del ángulo de una de las pruebas para una masa de 1,1 kg, en la cual se asumen ajustes totalmente deslizantes en las juntas donde está ensamblado el resorte, para simplificar la solución analítica

que fue descrita en la ecuación 3. Cabe resaltar que, para cada punto experimental, fue necesario realizar tres repeticiones para cumplir con la metodología de experimentación acorde al sistema.

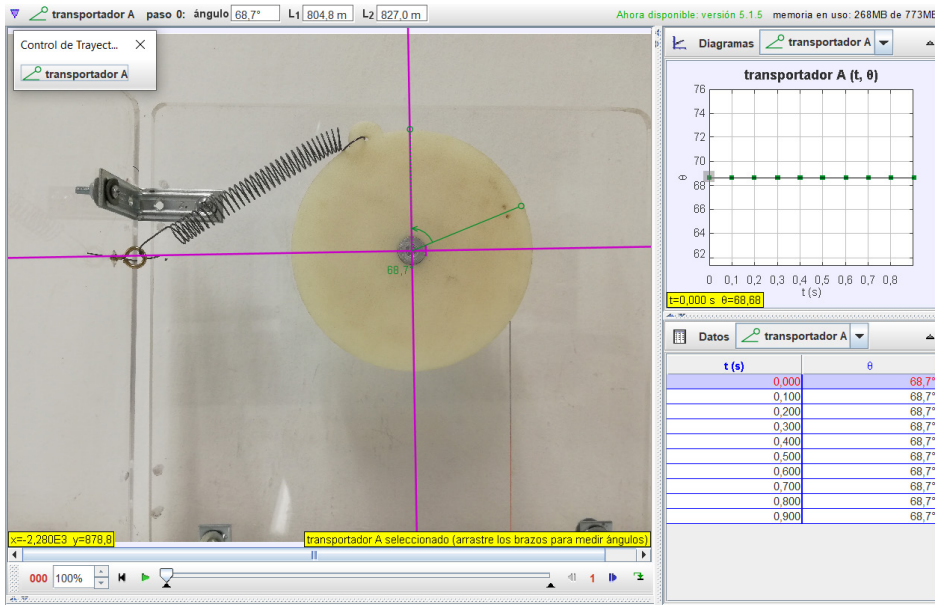


Figura 3. Toma de datos de manera experimental.

La toma de datos permite identificar la evolución del ángulo  $\theta$  y realizar la respectiva comparación con el comportamiento encontrado de manera analítica. La figura 4, permite analizar la respuesta del modelo analítico en función del ángulo y a su vez, se propone un modelo de regresión lineal (ver ecuación 4).

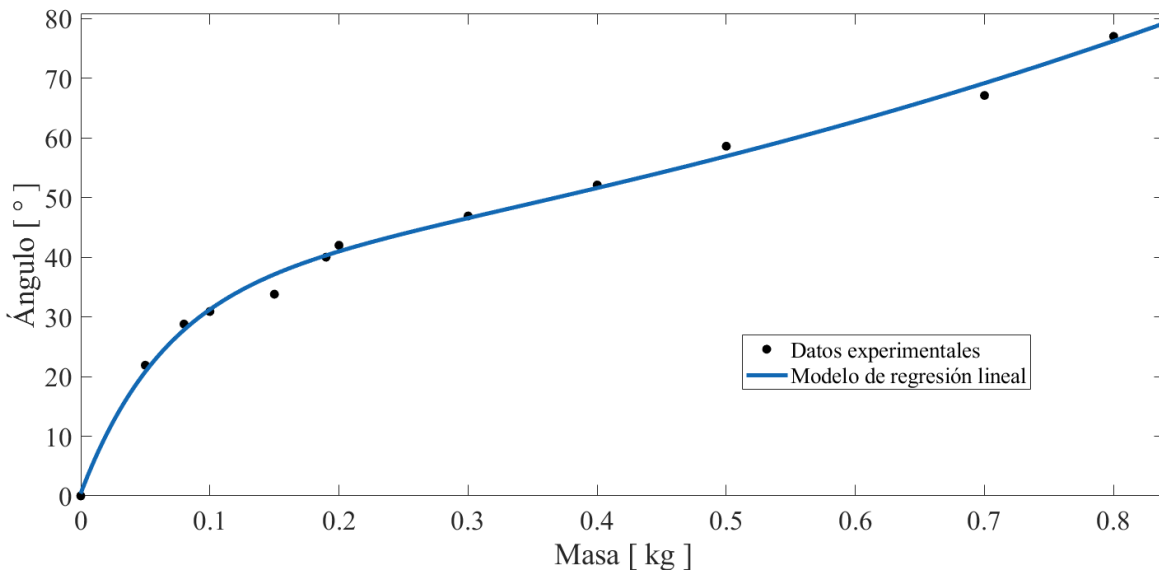


Figura 4. Modelo de regresión lineal y datos experimentales.

$$\theta(m) = 36.22e^{0.9241m} - 36.14e^{-12.76m} \tag{4}$$



La ecuación 4, puede ser reproducida teniendo en cuenta el ingreso de la masa en unidades SI en [kg] para obtener como respuesta el ángulo de desplazamiento de la polea en [°]

Sin embargo, el desarrollo de este proyecto obtiene como respuesta principal de trabajo la concordancia que puedan tener estos datos experimentales bajo condición de los datos encontrados en el modelo analítico ya propuesto. La veracidad de la solución analítica propuesta, podrá ser evaluada según los datos de comparación que se ilustran en la figura 5, en la cual es posible identificar el comportamiento obtenido de manera experimental y sus diferencias bajo el modelo analítico.

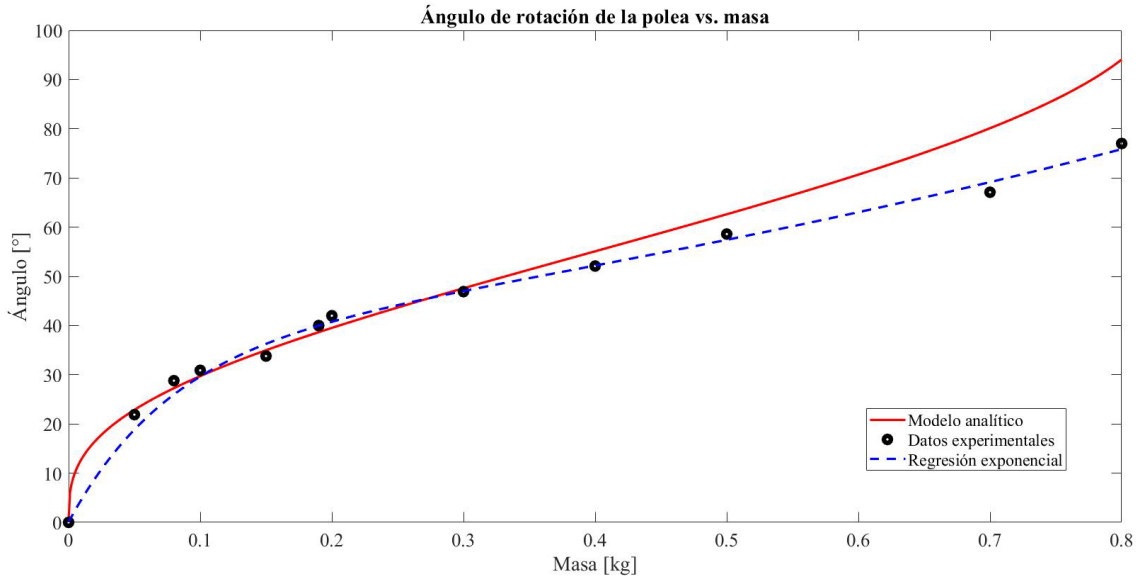


Figura 5. Correlación de datos experimentales, modelo de regresión y modelo analítico.

Adicional a esto, es posible obtener el cálculo del error cuadrático medio a través de la ecuación 5, al comparar la diferencia porcentual de lo obtenido bajo el modelo de regresión y el modelo analítico; donde  $f(x)$  y  $\hat{f}(x)$  son la función analítica y el modelo de regresión lineal respectivamente, y  $m$  es la masa soportada en la polea.

$$\text{Error} = \frac{\int_0^m [f(x) - \hat{f}(x)]^2 dx}{\int_0^m [f(x)]^2 dx} \quad (5)$$

Haciendo uso del software MatLab, es posible ejecutar las respectivas gráficas y el cálculo numérico de la ecuación 5, de la cual se obtiene como respuesta un error de 0.0864 (8.64%). La respuesta del método numérico para ejecutar el análisis del error se hace a partir del cálculo de las integrales bajo la regla de Simpson 1/3.



## 4. Conclusiones

Los objetivos de aprendizaje del curso de la asignatura Estática abarcan la comprensión del concepto de fuerza, momento, equilibrio y diagramas de cuerpo libre, sin embargo, hasta el momento todo el análisis era puesto bajo la consideración de problemas teóricos resueltos de manera analítica. Con la propuesta del modelo experimental, el estudiante tiene la posibilidad de contrastar los resultados teóricos con los prácticos, mediante un modelo a escala y el cual contempla temas de ajustes, tolerancias y materiales, que no son considerados en la solución teórica. Así mismo, mediante la práctica de laboratorio se fortalecen habilidades de trabajo en equipo, lectura y escritura y uso de herramientas de laboratorio.

Con el uso de la guía de laboratorio, el estudiante contará con una orientación clara acerca del desarrollo de la práctica, evitando así, que se generen fallas en cuanto al ensamble o manejo de los datos, que puedan generar errores en la interpretación de estos.

Según el análisis y comparación de los resultados del modelo matemático y las pruebas realizadas con el modelo físico, el modelo cumple con las especificaciones, al mostrar que los datos adquiridos por medio de las pruebas experimentales se aproximan a los resultados del modelo teórico, encontrando que el error entre el modelo de regresión y el modelo analítico es del 8.64%.

El equipo de estudiantes del Semillero de Investigación del grupo de Diseño Mecánico y Desarrollo Industrial, tuvo la posibilidad de llevar a cabo un proyecto de desarrollo, contemplando todas las etapas para tal fin, desde la generación de la idea, pasando por los trámites de cotizaciones, solicitudes y órdenes de compra, hasta llegar al diseño y construcción de algunos de los elementos, contemplando temas de ajustes, tolerancias y materiales. De esta manera, pudieron integrar los conocimientos vistos en la carrera y generar así el modelo práctico presentado.

## 5. Referencias

- ACOFI (2004, marzo). Contenidos programáticos básicos para ingeniería mecánica. Consultado el 12 de junio de 2020 en: <https://www.acofi.edu.co/wp-content/uploads/2015/07/Contenidos-programaticos-b%C3%A1sicos-para-ingenier%C3%ADa-Mec%C3%A1nica.pdf>
- ASME (2018, January). Strategy Vision 2030. Consultado el 12 de junio de 2020 en: <https://www.asme.org/asme-programs/students-and-faculty/engineering-education/strategy-vision-2030>
- Bedford, A.; Fowler, W.; (2007). Engineering Mechanics: Statics, Pearson, London.
- Beer, F.; Johnston, E.; Mazurek, D.; Cornwell, P.; Self, B. (2018). Vector Mechanics for Engineers: Statics/Dynamics, McGraw Hill, New York.
- Boresi, A.; Schmidt, R. (2000). Engineering Mechanics Statics, CL-Engineering, Stamford.
- Hibbeler, R. (2015). Engineering Mechanics Statics, Pearson, London.
- Meriam, J.; Kraige, L.; Bolton, J. (2014). Engineering Mechanics Statics, Wiley, Hoboken.

- NCEES (2017, April). Principles and Practice of Engineering Examination MECHANICAL—MACHINE DESIGN AND MATERIALS CBT Exam Specifications. Consultado el 12 de junio de 2020 en: [https://ncees.org/wp-content/uploads/MDM\\_Apr-2020\\_CBT.pdf](https://ncees.org/wp-content/uploads/MDM_Apr-2020_CBT.pdf)
- Norton, R. (2006). Machine design an integrated approach, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Plesha, M.; Gray, G.; Constanzo, F. (2012). Engineering Mathematics Statics, McGraw Hill, New York.
- Shames, I. (1998). Mecánica para Ingenieros Estática, Prentice Hall, Madrid.

### Sobre los autores

- **Diana Lorena Cardona Montoya**. Ingeniera Mecánica, Magister en Ingeniería. Profesora Asistente Departamento de Mecánica y Producción. [dcardona@autonoma.edu.co](mailto:dcardona@autonoma.edu.co)
- **César Augusto Álvarez Vargas**, Ingeniero Mecánico y de Manufactura, M Sc en Sistemas Automáticos de Producción, PhDC en Ingeniería Mecánica. Profesor Asistente. Departamento de Mecánica y Producción, [dekinov@autonoma.edu.co](mailto:dekinov@autonoma.edu.co)
- **Jaime Andrés Arenas Barreiro**, Estudiante programa Ingeniería Mecánica. [jaime.arenasb@autonoma.edu.co](mailto:jaime.arenasb@autonoma.edu.co)

---

Los puntos de vista expresados en este artículo no reflejan necesariamente la opinión de la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería.

Copyright © 2020 Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería (ACOFI)