



CARTAGENA, COLOMBIA

18 al 21 de septiembre de 2018

Juan Camilo Urango Pérez, Alejandro Restrepo Martínez

Universidad Nacional de Colombia Medellín, Colombia

Resumen

Los elementos rotativos gozan de amplio uso en los sistemas mecánicos con piezas móviles. Por ello, el diseño y operación de estos elementos requiere el conocimiento del campo de esfuerzos que en estos se genera. Estos elementos, además de estar sometidos a las cargas debido a su interacción con otros elementos, también sufren esfuerzos mecánicos por el efecto de las fuerzas inerciales propias del movimiento rotacional. Existen diversos métodos para abordar el análisis del campo de esfuerzo en un material ante la aplicación de cargas inerciales de rotación. Entre ellos están los modelos analíticos de la teoría de la elasticidad; sin embargo, estos no consideran que la respuesta mecánica durante la formación del campo de esfuerzos en materiales como el PMMA, es un fenómeno dependiente de la tasa de deformación. Diversas investigaciones establecen que el comportamiento de cedencia del PMMA tiene una relación directa con la tasa de deformación; sugiriendo así para los elementos rotativos, que el arranque de movimientos rotacionales con mayor aceleración angular generaría una mayor resistencia a la cedencia. En este trabajo se investiga acerca de esta hipótesis a través de modelos analíticos computacionales que generan imágenes de fotoelasticidad, en las cuales los patrones de franjas contienen información del campo de esfuerzos; de tal manera que se pueden encontrar tendencias entre los patrones de franjas de las imágenes de fotoelasticidad y los parámetros de movimiento, estableciendo así, resultados que pueden ser verificados de manera experimental en trabajos futuros. Así, este trabajo presenta una metodología que, a través del uso de modelos analíticos y el estudio de imágenes de fotoelasticidad, permite analizar el fenómeno de la respuesta mecánica de un material ante cargas inerciales. Con ello se busca generar un aporte a los campos de estudio de la Mecánica de sólidos, la Dinámica estructural y la Mecánica experimental. Finalmente, en este trabajo se concluye que, en discos rotativos de PMMA, el inicio del movimiento con aceleraciones mayores provoca la obtención de una mayor

resistencia a la cedencia en el material, lo cual se evidenció con un patrón de mayor número de franjas.

Palabras clave: fotoelasticidad; esfuerzos dinámicos; modelo computacional

Abstract

Rotatory elements are widely used in mechanical systems which involve mobile parts. That way, designing and operation of such elements require to know the stress field that is generated into them. These elements, besides they are subject to mechanical stress due to their interaction with other elements, they are also subject to mechanical stress due to inertial forces inherent to rotational movement. There are different methods to tackle the analysis of stress field in a material subject to rotational inertial forces. Noteworthy among those are analytical methods from elasticity theory; nevertheless, those models do not consider that the mechanical response during the stress field establishment on material such as PMMA is a dependent phenomenon on the deformation rate. Several research state that PMMA yield strength has a direct correlation with the deformation rate; suggesting, that way, that movement starts in rotatory elements with higher acceleration would lead to a higher yield strength. In this work, this hypothesis is inquired through analytical computational models that produce photoelasticity images, in which the striped patterns contain information regarding the stress field; thus, tendencies along striped patterns and motion parameters might be found, thereby laying down results which can be validated experimentally in future works. Thus, this work presents a methodology which permits, through analytical model and the study of photoelasticity images, to analyze the phenomenon of a material mechanical response for inertial loads. With this, it seeks to generate a contribution to the fields of Solid Mechanics, Structural Dynamic and Experimental Mechanics. Finally, it is concluded in this work, that in PMMA rotatory discs, movement start with higher acceleration leads to a higher yield strength in the material, which was evidenced by a pattern with a more strips.

Keywords: photoelasticity; dynamic stress; computational model

1. Introducción

El análisis de esfuerzos dinámicos de rotación consiste en estudiar como las cargas inerciales que se provocan por la naturaleza de este movimiento se distribuyen en el material del elemento rotativo. La evaluación de estos esfuerzos cobra gran importancia para el diseño y la operación de estos elementos, ya que en estas actividades se debe garantizar que el material no presente fallas mecánicas. En el contexto ingenieril se considera como falla mecánica, que el material alcance el comportamiento de cedencia o *yielding*, como se le llama a este fenómeno en inglés.

Existen diversos enfoques que permiten evaluar en campo completo los esfuerzos dinámicos de rotación en discos. Entre ellos está la utilización del modelo analítico de esfuerzos de la teoría de la elasticidad, como el que presenta Timoshenko (1956), y también está el planteamiento de un modelo numérico de elementos finitos (Kumar et al, 2018). Sin embargo, aunque estos enfoques



pueden ser efectivos para la cuantificación de esfuerzos cuando se alcanza un régimen de movimiento de equilibro dinámico con una velocidad angular definida y constante, estos no permiten estudiar como es el comportamiento de cedencia del material con respecto a la tasa de deformación aplicada; esto es, con la tasa a la cual el material sufre una deformación unitaria por la aplicación de cargas; sobre la cual es de esperarse, que tenga una relación directa con la aceleración angular con la que se inicia un movimiento de rotación.

Para diversos materiales como el polimetilmetacrilato (PMMA), que se conoce comúnmente como acrílico, el comportamiento de cedencia tiene una dependencia directa con la tasa de deformación; de forma que, a mayor tasa de deformación, mayor resistencia a la cedencia. Diversos estudios (Zhou et al, 2013) (Cheng et al, 2002) (Zhang et al, 2016) demuestran de manera experimental que cuanto mayor sea la tasa a la cual que se aplique la deformación en el material, el comportamiento de falla y cedencia mecánica del PMMA se presenta a mayores rangos de carga y esfuerzo. En particular, Zhang et al (2016) presenta un estudio en el que, a partir de mediciones experimentales, logra desarrollar un modelo matemático para describir el comportamiento de cedencia del PMMA como función de tres tasas de deformación diferentes.

Ante lo aquí expuesto, se evidencia que la consideración de la tasa de deformación es fundamental para estudiar el comportamiento de cedencia en materiales como el PMMA. Adicionalmente, se evidencia que, por el hecho de que la resistencia a la cedencia de este material tenga una relación directa con la tasa de deformación, es de esperarse que, si se analiza el escenario de aplicación de caras inerciales de rotación, luego la tasa de deformación también tendrá una relación directa con la aceleración angular con que se inicia el movimiento. Ello, obedeciendo al hecho de que es durante el inicio del movimiento de rotación donde se aplican las cargas inerciales; y que es la aceleración angular la que define a que tasa se alcanzará un cierto régimen de esfuerzos dinámicos.

Todo lo anterior, conlleva a que se formule una hipótesis de que, para los elementos rotativos, el arranque de movimientos con mayor aceleración angular generaría una mayor resistencia a la cedencia. Es alrededor de esta hipótesis que se plantea el estudio que se presenta en este trabajo. Este estudio se realiza a través del desarrollo de modelos analíticos computacionales que generan imágenes de fotoelasticidad, en las cuales los patrones de franjas contienen información del campo de esfuerzos (Urango-Pérez et al, 2018) (Briñez et al, 2015) (Ramesh et al, 2016); de tal manera que se pueden encontrar tendencias entre los patrones de franjas de las imágenes de fotoelasticidad y los parámetros del movimiento rotativo y la resistencia del material PMMA.

2. Materiales y métodos

El marco de desarrollo del modelo computacional que aquí se presenta, comprende tres fases. Estas fases consistieron en el desarrollo del modelo analítico del campo de esfuerzos, como primera fase; seguida por la implementación de los resultados de Zhang et al (2016) para verificar que se alcanzase un valor de velocidad angular en donde inicia a presentarse cedencia de la materia, como segunda fase; y finalmente la generación digital de imágenes sintéticas de fotoelasticidad, sobre las cuales se realizó un conteo de franjas de manera computacional, como tercera fase. Estas



se realizan para las tres tasas de deformación que reporta el estudio mencionado; y posteriormente, se comparan los resultados y se concluye. Todo el desarrollo computacional se realiza en el lenguaje de programación de MATLAB.

El caso de estudio que se utiliza para el desarrollo corresponde a un modelo cuya geometría es la de un disco con un agujero concéntrico, de espesor constante y que es sometido a rotación respecto un eje perpendicular al plano del disco, que lo atraviesa en su centro. El material que se utiliza es el polimetilmetacrilato (PMMA). La geometría, sus dimensiones y las propiedades del material que son relevantes para este estudio se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Geometría, dimensiones y propiedades del material (PMMA) de los modelos.									
Propiedad	Valor	Unidades	Fuente de consulta	Geometría y dimensiones					
Módulo de elasticidad	3,33 x 10 ⁹	Pa		3,12					
Módulo cortante	1,23 x 10 ⁹	Pa		25					
Coeficiente de Poisson (v).	0,35	-							
Coeficiente de esfuerzo-óptico (c).	1,08 x 10 ⁻¹⁰	m²/N	(Xu, et al., 2004)	¢ 200					
				Medidas en mm.					

El desarrollo del modelo analítico de esfuerzos -primera fase-, partió de las expresiones matemáticas que modelan los esfuerzos de discos en rotación con agujero concéntrico. Estas son presentadas por Timoshenko et al. (1956) y se muestran en las ecuaciones (1).

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+v}{8}\rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right) \\ \sigma_\theta = \frac{3+v}{8}\rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3v}{3+v}r^2\right) (1) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Donde ω es la velocidad angular, v es el coeficiente de Poisson y ρ es la densidad; mientras que a y b corresponden al radio del agujero y del disco, respectivamente.

Las componentes polares de esfuerzos se transforman posteriormente en componentes de esfuerzo principal, que para este caso en donde se tiene que la componente cortante $\tau_{r\theta}$ es nula, se obtiene una transformación directa definida como se presenta en las ecuaciones (2).

$$\{\sigma_1 = \sigma_r \quad \sigma_2 = \sigma_\theta \ (2)$$

La implementación de los resultados reportados por Zhang et al (2016), se realiza utilizando la expresión de falla a la que llega este autor como resultado de un análisis del comportamiento de cedencia del PMMA ante ensayos de tracción con diferentes tasas de deformación. Esta expresión se presenta en la ecuación (3) y sus parámetros para cada una de las tres tasas de deformación



que se estudian se presentan en la tabla 2. El uso de esta expresión tuvo como fin encontrar los valores de velocidad angular críticos para la operación del disco, ante cada una de las tres tasas de deformación; de esa forma, una vez se verificaba que se presentada cedencia en el material, se tomaba ese régimen de esfuerzos para generar las imágenes de fotoelasticidad.

$$\sqrt{J_2} = a + bI_1$$
 (3)

Donde, J_2 y I_1 son el segundo invariante de esfuerzos desviadores y el primer invariante de esfuerzos medios, respectivamente; los cuales se definen como

$$\left\{J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2] \quad I_1 = \sigma_1 + \sigma_2$$
(4)

Tabla 2. Parámetros de la ecuación (3) para cada una de las tasas de deformación. Valores tomados de Zhang (2016).

$\dot{\varepsilon} = 1x10^{-3} \left[\frac{mm}{mm \cdot s}\right]$		$\dot{\varepsilon} = 1x10^{-1}$	$-2\left[\frac{mm}{mm \cdot s}\right]$	$\dot{\varepsilon} = 1x10^{-1} \left[\frac{mm}{mm \cdot s}\right]$	
а	b	а	b	а	b
52.132	0.143	52.932	0.143	59.522	0.145

La generación digital de las imágenes de fotoelasticidad se realiza a partir del cálculo del campo de intensidades de luz que se obtendría con un arreglo óptico de polarización circular, fondo claro y fuente de luz monocromática de longitud de onda (λ) de 560 [nm]. La expresión para el campo de intensidades de luz que se calcula es la propuesta por Shang et al (2015) y se presenta en la ecuación (5). Las imágenes sintéticas que se generan a partir de esta expresión son de 513x513 pixeles.

$$I = I_B + 0.5I_f(1 + \cos(\delta))$$
(5)

Donde I_B e I_f corresponden a las intensidades de luz del ambiente (Ruido) y de la fuente de luz; las cuales se definieron para este análisis como 20 luxes y 200 luxes, respectivamente. Por su parte φ se refiere el ángulo de desfase o retraso de la onda de luz, generado por el efecto fotoelástico y que está definido, para un espesor h, como

$$\delta = \frac{2\pi hc}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2)$$
 (6)

Una vez generadas las imágenes digitales de fotoelasticidad, se realiza la comparación entre ellas mediante el conteo de las franjas; las cuales indican el nivel de esfuerzos que se presenta en cada caso. De forma que, a mayor número de franjas, mayor nivel de esfuerzos. Este conteo de franjas también se realiza de manera computacional al analizar pixel a pixel las imágenes que fueron generadas.

La identificación de las franjas se realiza utilizando como parámetro de evaluación a la intensidad de luz de cada pixel. Se utiliza el hecho de que las franjas tienen un patrón circular (Como se puede constatar posteriormente en la sección de resultados) y se establece como criterio de identificación de una franja que si al recorrer la imagen de manera radial se detectaba un cambio



de intensidad de luz desde el rango de 150 a 220 luxes (Zona clara), a un rango de valores de 20 a 80 luxes (Zona oscura) y posteriormente se regresaba al rango de 150 a 220 luxes; ello indicaba que allí se presentaba una franja. Cabe anotar que el conteo de franjas se inicia desde una posición radial igual a 2 veces el radio del agujero concéntrico acudiendo al principio de saint venant. Ello debido a que, en las cercanías del agujero, los efectos de concentración de esfuerzos de esta discontinuidad provocan un fenómeno de pérdida de calidad de la imagen.

3. Resultados y discusión

Las imagen de fotoelasticidad generada para una tasa de deformación de $\dot{\varepsilon} = 1x10^{-3} [\frac{mm}{mm \cdot s}]$ y la gráfica de monitoreo del contador de franjas se presentan en las figuras 2(a) y 2(b), respectivamente. La velocidad angular de falla que se alcanzó para esta tasa de deformación fue 33300 rpm. El número de franjas detectado en esta imagen fue de 12 franjas.



Figura 2. (a) Imagen de fotoelasticidad computacional para una tasa de deformación de 1x10⁻³. (b) Gráfica de monitoreo del contador de franjas de la imagen (a).

Los campos de esfuerzos principales para el régimen de falla de la tasa de deformación mencionada se presentan en la figura 3. De aquí es de resaltar los valores máximos de cada uno de los esfuerzos principales son 23.6 MPa para el primer esfuerzo principal y de 64.2 MPa para segundo esfuerzo principal. Los valores de estos campos de esfuerzos son de utilidad posteriormente para el análisis comparativo.





Figura 3. Campos de esfuerzos principales σ_1 y σ_2 para la tasa de deformación de 1x10⁻³.

Similarmente, en las figuras 4(a) y 4(b) se presentan la imagen de fotoelasticidad para una tasa de deformación de $\dot{\varepsilon} = 1x10^{-2} [\frac{mm}{mm \cdot s}]$ y su gráfica de monitoreo del conteo de franjas. Para esta tasa de deformación se alcanzó una velocidad angular de falla de 33600 rpm; observándose así que el rango de operación se aumenta en 300 rpm (1%) respecto al caso anterior. El número de franjas que se detectó para este caso fue de 13 franjas, una más respecto al caso anterior.



Figura 4. (a) Imagen de fotoelasticidad computacional para una tasa de deformación de 1x10⁻². (b) Gráfica de monitoreo del contador de franjas de la imagen (a).

Los campos de esfuerzos principales para esta tasa de deformación se presentan en la figura 5. De estos, se puede notar que, aunque no hay variación en la forma en que se distribuyen los esfuerzos en el disco, sí hay un cambio en los valores máximo de esfuerzos principales; notándose un aumento de 2.2 MPa para el esfuerzo principal 1 (Aumento del 1,8 %) y de 1.1 MPa para el esfuerzo principal 2 (Aumento del 1.7%), respecto a la tasa de deformación anterior.





Figura 5. Campos de esfuerzos principales σ_1 y σ_2 para la tasa de deformación de 1×10^{-2} .

Finalmente, en las figuras 6(a) y 6(b) se presenta la imagen de fotoelasticidad para una tasa de deformación $\dot{\varepsilon} = 1x10^{-1}[^{mm}/_{mm \cdot s}]$ y su gráfica de monitoreo. La velocidad angular de falla para esta tasa de deformación fue 35700 rpm; obteniéndose un aumento de 2400 rpm respecto a la tasa de 1x10⁻³ (7.2%) y de 2100 rpm, respecto a una tasa de 1x10⁻² (6.25%). El número de franjas detectado también tuvo un aumento, alcanzando un valor de 19 franjas; que contrastan con las 12 y 13 franjas detectadas para las tasas de deformación de 1x10⁻³ y 1x10⁻², respectivamente.



Figura 6. (a) Imagen de fotoelasticidad computacional para una tasa de deformación de 1x10⁻¹. (b) Gráfica de monitoreo del contador de franjas de la imagen (a).

Los campos de esfuerzos principales se presentan en la figura 7. De ellos se puede notar que el valor máximo del primer esfuerzo principal tuvo un aumento de 18.5 MPa (15%) respecto a la tasa de 1×10^{-3} ; y de 16.3 MPa (13%) respecto a la tasa de 1×10^{-2} . Por otro lado, el valor máximo del segundo esfuerzo principal sufrió un aumento de 9.6 MPa (15%) respecto a la tasa de 1×10^{-3} y de 8.5 MPa (13%) respecto a la tasa de 1×10^{-2} .





Figura 7. Campos de esfuerzos principales σ_1 y σ_2 para la tasa de deformación de 1x10⁻¹.

Para mostrar de forma más detallada como es la dependencia de las variables que fueron de interés en este estudio, como la velocidad angular de falla, el número de franjas que se genera y los valores máximos de los dos primeros esfuerzos principales, con la tasa de deformación; se presentan en las figuras 8(a-d) las gráficas de dispersión de cada una de estas variables ante las tres tasas de deformación estudiadas y sus respectivas líneas de tendencia.



Figura 8. (a) Gráfica de velocidad angular de falla contra la tasa de deformación aplicada. (b) Gráfica de número de franjas generadas contra la tasa de deformación aplicada. (c) . Gráfica de valor máximo del primer esfuerzo principal contra la tasa de deformación aplicada. (d) Gráfica de valor máximo del segundo esfuerzo principal contra la tasa de deformación aplicada.

De la figura 8, se puede notar que se presentan tendencias crecientes de los valores críticos de velocidad angular y de los esfuerzos máximos principales, que son los que definen la resistencia a la cedencia del material, con respecto a la tasa de deformación. Lo cual, si se relaciona con el escenario del arranque de un movimiento rotacional – que corresponde al momento en el que se aplican las cargas inerciales; ello indicaría que el inicio del movimiento con una mayor aceleración angular, que se presume provocaría una mayor tasa de deformación, provocaría una mejor respuesta mecánica del material, que se evidencia en un mayor valor critico de velocidad angular y una mayor resistencia a la cedencia.

Similarmente, se puede notar que el número de franjas de las imágenes de fotoelasticidad que se generaron computacionalmente también presenta una tendencia creciente con las tasas de deformación. Esto establece una posibilidad de validación del modelo computacional mediante un enfoque experimental en el que se capturen y analicen imágenes de fotoelasticidad, para luego compararlas con las imágenes generadas que aquí se presentan. Lo anterior se plantea como una propuesta de trabajo futuro.

4. Conclusión

En el presente trabajo se desarrolló un modelo computacional de imágenes de fotoelasticidad de un disco con agujero concéntrico; a través del cual se estudiaron los esfuerzos dinámicos por rotación que se presentan ante una condición crítica en la que se alcanza el comportamiento de cedencia. El estudio se realizó de acuerdo con tres tasas de deformación; planteando así un análisis comparativo de tres regímenes diferentes de inicios de movimiento rotacional. Se pudo concluir que se presenta una tendencia de relación directa entre las tasas de deformación y los parámetros de movimiento y resistencia, como lo son la velocidad angular máxima de operación y los valores de esfuerzos principales máximos.

De esa forma, se estableció de manera computacional que la hipótesis de que regímenes de inicio de movimiento rotacional en discos de PMMA con tasas de deformación mayores, provocarían una mejor respuesta mecánica del material, evidenciada en mayores valores críticos de velocidad angular y de valores máximos de esfuerzos principales. Ello se pudo medir en las imágenes de fotoelasticidad a través del número de franjas generadas; de modo que cuan mayor fuera la tasa de deformación aplicada, mayor fue el número de franjas detectado.

5. Referencias bibliográficas

- Briñez de León, J., Restrepo-Martínez, A. and López Giraldo, F. (2015). Estudios de fotoelasticidad: desarrollos y aplicaciones. Revista Politécnica, Vol. 9, No. 16, pp.27-36.
- Chen, W., Lu, F. and Cheng, M. (2002). Tension and compression tests of two polymers under quasi-static and dynamic loading. Polymer Testing, Vol. 21, No. 2, pp.113-121.
- Kumar, R., Ranjan V. and Kumar V. (2018). Finite Element Modelling and Analysis of The Burst Margin of a Gas Turbine Disc Using an Area Weighted Mean Hoop Stress Method. Engineering Failure Analysis, Vol. 90, pp. 425-433.
- Ramesh, K. and Ramakrishnan, V. (2016). Digital photoelasticity of glass: A comprehensive review. Optics and Lasers in Engineering, Vol. 87, pp.59-74.
- Shang, W., Ji X. and Yang X. (2015). Study on several problems of automatic full-field isoclinic parameter measurement by digital phase shifting photoelasticity. Optik International Journal for Light and Electron Optics, Vol. 126, No. 19, pp. 1981-1985.
- Timoshenko, S. and Goodier, J. (1987). Theory of Elasticity. 2nd ed. Auckland: McGraw-Hill. pp.95-99.
- Urango Pérez, J., Carmen Motta, G., Briñez de León, J. and Restrepo Martínez, A. (2018). Validación del uso de fotoelasticidad como herramienta para los cursos de Mecánica de Sólidos. Revista EIA, Vol. 14, No. 28, p.117-131.
- Xu, W., Yao, X., Xu, M., Jin, G. and Yeh, H. (2004). Fracture characterizations of V-notch tip in PMMA polymer material. Polymer Testing, Vol. 23, No. 5, pp.509-515.
- Zhang, J., Jin, T., Wang, Z. and Zhao, L. (2016). Experimental investigation on yield behavior of PMMA under combined shear-compression loading. Results in Physics, Vol. 6, pp.265-269.
- Zhou, Z., Su B., Wang Z., Li Z., Shu X., and Zhao L. (2013). Shear-Compression Failure Behavior of PMMA At Different Loading Rates. Materials Letters, Vol. 109, pp 151-153.

Sobre los autores

- Juan Camilo Urango Pérez: Estudiante de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. <u>jcuangop@unal.edu.co</u>.
- Alejandro Restrepo Martínez: Ingeniero Mecánico, Máster en Ingeniería de Sistemas, Ph.D. de la Universidad Nacional de Colombia. Profesor Asociado. <u>arestre5@unal.edu.co</u>.

Los puntos de vista expresados en este artículo no reflejan necesariamente la opinión de la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería.

Copyright © 2018 Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería (ACOFI)

